6 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ИНТЕГРАЛЫ
6.1 Негізгі ұғымдар

$w = f(z)$ функциясы D облысында бірмәнді және үзіліссіз, C - осы облыстың А және В нүктелерін АВ бағытында жалғайтын бөлік тегіс сызығы болсын.

C сызығын осы сызықтың бойында А нүктесінен В нүктесіне қарай тізбектеле орналасқан $A = z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = B$ нүктелері арқылы $z_0 z_1, z_1 z_2, ..., z_{n-1} z_n$ бөлік сызықтарына бөлеміз де

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \cdot (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \cdot \Delta z_k \qquad (6.1)$$

қосындысын құрамыз. Бұл қосынды $f(z)$ функциясының АВ сызығындағы *интегралдық қосындысы* деп аталады.

Анықтама 19. $f(z)$ функциясының АВ бағытындағы С сызығы бойынша алынған *интегралы* деп (5.1) қосындысының *n* санын барлық бөлік сызықтарының ұзындықтарының ең үлкені нөлге ұмтылатындай етіп шектеусіз өсіргендегі шегін айтамыз да

$$\int_C f(z)dz \qquad (6.2)$$

түрінде белгілейміз.

Ескерту: Егер С тұйық сызық болса, онда интеграл $\oint_C f(z)dz$ түрінде белгіленіп *С тұйық контуры бойынша алынған интеграл* немесе *С тұйық контурлы интеграл* деп аталады.

Интегралдың анықтамасында С сызығының басы мен ұшы (оң сызылу бағыты) көрсетіледі, ал тұйық контур үшін оң сызылу бағытын былай көрсете алмаймыз. Тұйық контурдың оң сызылу бағыты ретінде сызу кезінде контурдың іші сол жақта қалатын бағытты аламыз.

Егер біз $z = x_k + y_k i$, $f(z_k) = U(x_k, y_k) + i\,V(x_k, y_k)$ белгілеулеріне көшсек, онда (5.1) интегралдық қосындысы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(U(x_k, y_k)\Delta x_k - V(x_k, y_k)\Delta y_k\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(V(x_k, y_k)\Delta x_k + U(x_k, y_k)\Delta y_k\right)\right)$$

түрінде жазылады да, интеграл анықтамасынан (6.2) интегралының екі қисық сызықты интеграл арқылы өрнектелінуін аламыз:

$$\int_C f(z)dz = \int_C U\,dx - V\,dy + i\cdot\int_C V\,dx + U\,dy \qquad (6.3)$$

Интегралдың анықтамасынан оның келесі қасиеттері шығады:

1. $\int_{C^-} f(z)dz = -\int_{C^+} f(z)dz,$ мұнда C^- және C^+ қарама – қарсы бағыттарда сызылған C сызығы;
2. $\int_C k\,f(z)dz = k\int_C f(z)dz,$ мұнда $k-$ комплекс тұрақты;
3. Егер C интегралдау қисығы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ бөлік тегіс қисықтарынан тұрса (яғни C – бөлік тегіс сызық болса), онда $\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$;
4. $\int_C \sum_{k=1}^{n} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k(z)dz$, егер $\int_C f_k(z)dz$ интегралы кез келген $k = 1, 2, \ldots, n$ үшін бар болса;
5. $\left|\int_C f(z)dz\right| \le M\cdot l,$ мұндағы l – C сызығының ұзындығы, $M = \max_{z\in C}\left|f(z)\right|$;
6. Егер C сызығы $z(t) = x(t) + i\cdot y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$ параметрлік түрінде берілсе, онда

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f\left(x(t) + iy(t)\right)\left(x'(t) + iy'(t)\right)dt;$$

7. Егер F(z) функциясы D облысында аналитикалық $f(z)$ функциясының алғашқы функциясы болса (яғни $F'(z)=f(z)$ болса), онда басы z_1, ұшы z_2 нүктелері болатын осы облыста жатқан кез келген C тегіс қисығы үшін Ньютон - Лейбництің

$$\int_C f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1) \tag{6.4}$$

формуласы орынды болады.

Ескерту: Егер *C* сызығы *y=f(x)*, $a \le x \le b$ айқын түрінде берілсе, онда берілген интегралды *x* айнымалысын *t* параметрі ретінде алып 6 - қасиет бойынша есептеуге болады.

7-қасиеттің негізінде келесі тұжырым алынады.

6.2 Кошидің интегралдық теоремасы. Көп байланысты облыс үшін Коши теоремасы.

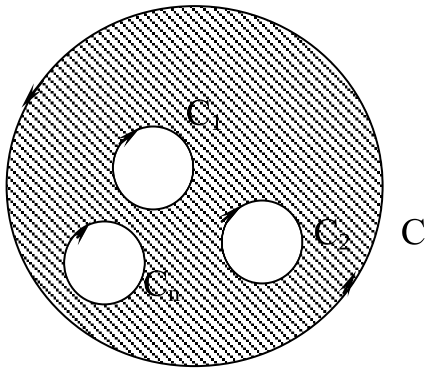
Кошидің интегралдық теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы C тұйық контурында және осы контурмен шектелген D облысында аналитикалық болса, онда

$$\oint_C f(z)dz = 0 .$$

Көп байланысты облыс үшін Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы C және оған іштей орналасқан $C_1, C_2, \ldots, C_n$ тұйық контурларында және $C^+, C_1^-, C_2^-, \ldots, C_n^-$ контурларымен шектелген D облысында аналитикалық (мұндағы таңбалар контурлар бойынша айналу бағыттарын білдіреді (6-сурет)) болса, онда

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

теңдігі орынды болады.



6-сурет

Егер $f(z)$ функциясы C бөлік тегіс тұйық контурымен шектелген D облысында аналитикалық және $z_0 \in D$ болса, онда

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz, \qquad (6.5)$$

түріндегі Кошидің *интегралдық формуласы* орынды болады (интеграл оң бағытты контур бойынша алынған).

Сонымен қатар, D облысында $f(z)$ функциясының кез келген ретті туындысы бар болып, олар үшін келесі формула орынды болады

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz, \quad z_0 \in D. \qquad (6.6)$$

Интегралдарды есептеуде (5.5), (5.6) формулаларының

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i \cdot f(z_0), \qquad (6.7)$$

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0), \quad n=1,2,3,\ldots. \qquad (6.8)$$

түріндегі жазылулары қолданылады.

Тұйық контурлы интегралды интеграл астындағы функцияның осы тұйық контур шектеген облыста (контурдың ішінде) айрықша нүктесі жоқ немесе бар болуына сәйкес Кошидің интегралдық теоремасын немесе интегралдық формуласын пайдаланып табамыз.